Matematické paralympijské hry 2022, starší

1. Ládin a PerM už si rozmýšlejí večerní zábavu po LMFS. Určete, komu z nich zábava vydrží na kolik večerů:

   (a) PerM si míní každý večer dát pět rumů, tři whisky a dva giny, a to pokaždé v jiném pořadí.

   (b) Ládin se hodlá po večerech bavit tím, že každý večer vypije osm piv a čtyři kořalky, přičemž nechce dát dvě kořalky hned po sobě (a chce pít nápoje pokaždé v jiném pořadí).

2. Nejmenovaní účastníci, kteří nedávali pozor o hodině matematiky, si lámou hlavu, zda existuje takový rovinný graf, který má při (alespoň) dvou různých rovinných nakresleních (do roviny – potažmo na tabuli, hlavu chobotnice či sklenici od piva) různé počty stěn. Z přednášky totiž víme, že stěny nejsou vlastností grafu, ale nakreslení a jeden graf lze tudíž nakreslit tak, aby měl pokaždé jiné stěny. Může se tedy lišit jejich počet? Dovedete jim poradit?

3. Dokažte, že každý graf s průměrným stupněm vrcholu d obsahuje podgraf s minimálním stupněm vrcholu alespoň $\frac{d}{2}$.

4. Nakreslete (celulárně) na tórus (alias Archeopteryxův hrnek) graf, který bude maximální (tedy nepůjde mu přidat žádnou hranu) a nebude mít všechny stěny tvořené trojúhelníky. Nápověda: Zamyslete se nad tím, co udělá (při celulárním nakreslení) přilepení ucha v souvislosti se zněním Eulerovy formule (pro plochy vyšších rodů).

5. Nechť G je souvislý graf s n vrcholy. Pro každé k takové, že $1 \leq k \leq n$, graf G obsahuje souvislý podgraf s k vrcholy. Dokažte!

6. Všichni víme, že Turingův stroj je snadný výpočetně úplný model zachovávající polynomialitu (tedy existuje-li v jakémkoliv myslitelném programovacím jazyce polynomiální algoritmus, existuje i pro Turingův stroj). PerM byl však odjakživa podivín a pro účely dolních odhadů by potřeboval tento model ještě oslabit. Zůstanou schopnosti Turingova stroje zachovány, i když tento bude mít jednu pásku, jeho abeceda budou jen binární číslice (0,1) a krok bude vypadat tak, že stroj smí změnit stav a buďto zapsat na pásku, nebo pohnout hlavou, ale ne obojí? (Tedy smí změnit stav a zapsat na pásku, nebo změnit stav a posunout hlavu.)

7. Dokažte, že pro každý obyčejný graf platí:

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq 2\sqrt{n}.$$

8. Navrhněte dva Turingovy stroje. První z nich pro zadané číslo (zapsané v desítkové soustavě) zjistí, zda je dělitelné třemi. Druhý z nich pro číslo zapsané na pásce binárně toto číslo vynásobí třemi. Nápověda: Rozmyslete si, jak se ve dvojkové soustavě násobí dvěma a zda toho nemůžeme s výhodou využít k výpočtu trojnásobku.

9. Zjistěte, kolika způsoby lze kružnici délky čtyři obarvit deseti barvami. Uvažujeme pouze přípustná obarvení, kdy vrcholy spojené hranou jsou obarveny různými barvami.

10. Vybíravost grafu se podobá barevnosti. Oproti barevnosti však máme každému vrcholu přiřazen seznam barev, kterými tento vrchol smíme obarvit (a tyto barvy jsou potenciálně různé). Barevnost je tedy speciální případ vybíravosti, kdy máme všechny seznamy stejné. Vybíravost parametrizujeme délkou seznamů barev pro jednotlivé vrcholy (nikoliv celkovým počtem barev). Rozhodněte (a svůj úsudek podpořte důkazem), zda bipartitní grafy mají vybíravost stejnou jako barevnost, tedy 2, či ne.

Všechny úlohy jsou po deseti bodech. Hurá do práce!