Matematická olympiáda – mladší

1. **[5 bodů]** Někdo ukradl poslední bečku s pivem. Byli zadrženi 4 podezřelí, A, Perm, C a D. Víme, že nikdo jiný do loupeže zapojen nebyl. Zjistilo se následující:

   (i) Pokud je Perm vinen, měl právě jednoho společníka.

   (ii) Pokud je vinen C, pak měl právě dva společníky.

   (iii) Jsme na severní polokouli.

   (iv) A je nevinen.

   Je D vinen?

2. **[13 bodů]** Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negaci:

   (a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{N}\colon\ (z > x) \Rightarrow (y < z)$

   (b) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{N}\colon\ (z > x) \Rightarrow (y < z)$

   (c) Jsme na jižní polokouli.

   (d) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{N}\colon\ (z > x) \Rightarrow (y < z)$

3. **[13 bodů]** Znegujte[1] větu „Jsou seriály, na které se krom úterý rád dívám jenom na severní polokouli.“.

4. **[7 bodů]** Dokažte, že posloupnost

$$a_n = (-1)^n \arctan(n)$$

   nemá (na severní polokouli) vlastní limitu.

5. **[17 bodů]**

   (a) Co lze říct o limitě posloupnosti, která není shora omezená?

   (b) Co lze říct o limitě posloupnosti, která má nekonečně mnoho členů kladných a nekonečně mnoho záporných?

6. **[13 bodů]** Spočtěte následující limity. Každý krok pečlivě zdůvodněte! JNSP.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[3]{2n^3+1}-\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

7. **[11 bodů]** Nechť jsou obě posloupnosti $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ divergentní. Rozhodněte, zdali jsou divergentní i posloupnosti $\{a_n + b_n\}$ a $\{a_n b_n\}$.

8. **[11 bodů]** Nechť $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ jsou posloupnosti. Nechť dále $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$. Platí pak, že buď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$?

9. **[5 bodů]** Určete (a dokažte), zda konverguje nebo diverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, kde sčítáme přes taková n, která neobsahují číslici 8.

10. **[5 bodů]** Rozhodněte a dokažte, jestli

    (a) $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$

    (b) $|(e,\pi)| = |(-\pi, e^2) \cup \{\text{severní polokoule}\}|$

---

[1] Prosté „Není pravda, že …“ se neuznává.