Závěrečná paralympiáda starších, LMFS 2022

1 Koule v díře (14 bodů)

Mějme v nekonečně hluboké potenciálové jámě na intervalu $x \in (0, L)$ částici ve stavu

$$\psi(x, t = 0) = N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[1 + 2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]. \tag{1}$$

Vlnovou funkci normujte (určete N), rozložte na stacionární stavy a načrtněte hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě x v časech $t = 0$ a $t = 2mL^2/\pi\hbar$.

2 V jiném stavu? (10 bodů)

Mějme několik následovně zadaných vlnových funkcí jednorozměrného kvantově mechanického systému

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + ix}, \quad \psi_3(x) = -i\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \tag{2}$$

Všechny tyto stavy mají stejnou hustotu pravděpodobnosti $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Znamená to, že se z fyzikálního hlediska jedná o stejné stavy i co se týká např. měření hybnosti nebo časového vývoje? Rozhodněte, které z těchto funkcí popisují stejné a které odlišné stavy.

3 Točit, či netočit (11 bodů)

Mějme nepohybující se částici o spinu 1 ve stavu $\psi = \left(-1,\ i\sqrt{2},\ 1\right)^T$. Její moment hybnosti je popsán operátory danými maticemi

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{L}_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Spočtěte celkový moment hybnosti $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ a rozhodněte, zda komutuje s jednotlivými složkami $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$.

b) Určete střední hodnoty měření všech tří složek momentu hybnosti. Jedná se o vlastní stav některého z nich?

4 Kule v dole (8 bodů)

Mějme pevnou a nepohyblivou kouli o poloměru 12 metrů na povrchu Země. Stojí na ní skateboardista o zanedbatelných rozměrech a po nekonečně malém šťouchnutí se díky gravitaci rozjíždí dolů. V jaké výšce se od koule odlepí?

5 Prolítnul mi zubr zdí, doufal, že to ubrzdí! (7 bodů)

Jakou rychlostí se musí pohybovat zubr o hmotnosti 600 kg, aby byla jeho vlnová délka rovna tloušťce zdi, která je 5 cm?

6 Elektron v atomu (12 bodů)

Měříme polohu elektronu v základním stavu atomu vodíku

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{a^3\pi}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \tag{4}$$

Jaké jsou pravděpodobnosti, že jej nalezneme uvnitř sféry o poloměru a, a že jej nalezneme mezi sférami o poloměrech a a $2a$, kde $a = 4\pi\hbar^2\epsilon_0/m_e Q_e^2$ je Bohrův poloměr?

7 Jednička (8 bodů)

Normujte stav daný vlnovou funkcí

$$\psi(x) = \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad \text{pomůcka: } \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

8 Kdo si má ty jednotky pamatovat... (7 bodů)

Jaký je fyzikální rozměr (tedy jednotka) vlnové funkce elektronu v d dimenzích?

9 Býkopes (10 bodů)

Víťa v Ekvádoru sleduje falešné předvádění Coriolisovy síly a na pomoc má buldočka - ale jeho pískací otvor se ucpal! Na proražení kruhového otvoru o průměru 1 milimetru je třeba přetlak 10^5 Pa, jak hluboko je třeba promáčknout stěny, aby se to podařilo? Buldoček má kulový tvar o průměru 10 cm a při zmáčknutí dvěma prsty naproti sobě mají promáčklé strany opět tvar sférických úsečí. Vzduch uvnitř je ideální plyn při tlaku 10^5 Pa.

10 Kvantový drát (13 bodů)

Najděte stacionární stavy kvantového drátu v nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě, tedy řešte nečasovou Schrödingerovu rovnici v potenciálu omezeném ve dvou směrech

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, a),\ y \in (0, b) \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}. \tag{6}$$

Jaké jsou vlastní energie systému? Jsou degenerované?