

## Matematické paralympijské hry Bedřichov/Kačák 2015 – starší

1. Na Letní matematicko-fyzikální soustředění přijelo  $n$  účastníků. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den? Pro jednoduchost předpokládejme, že rok má 365 dní a pravděpodobnost narození je pro každý den v roce stejná. [8 b.]
2. (a) Je pravda, že množina všech posloupností nul, jedniček a dvojek má větší mohutnost než množina všech posloupností nul a jedniček?  
(b) Může mít funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nespočetně mnoho lokálních extrémů? [13 b.]
3. Turnaj je úplný orientovaný graf, tj. orientovaný graf, v němž pro libovolné dva vrcholy  $u, v$  existuje hrana z  $u$  do  $v$ , nebo z  $v$  do  $u$  (ale ne obě). Dokažte, že každý turnaj obsahuje Hamiltonovskou cestu (tedy cestu procházející všemi vrcholy). [10 b.]
4. Ukažte, že úplný obyčejný graf  $K_n$  je sjednocením cest různých délek (žádné dvě cesty nesmějí mít tutéž délku). [12 b.]
5. Necht'  $G$  je obyčejný graf, jehož každý vrchol má stupeň alespoň 2. Dokažte, že existuje souvislý graf  $H$  s týmž skóre jako  $G$ . [7 b.]
6. Popište obecný postup, jak ze zadaného obyčejného grafu vyrobit regulární graf pomocí operací přidání vrcholu a přidání hrany (hrana může vést pouze mezi novými vrcholy nebo mezi novým a starým vrcholem, nikoliv mezi dvěma starými vrcholy). [6 b.]
7. Rozhodněte, zda platí (a vysvětlete proč): Pro každé  $n$  existuje  $N$  takové, že jakýchkoliv  $N$  bodů v rovině v obecné poloze obsahuje konvexní  $n$ -úhelník, jehož vrcholy jsou některé z těchto  $N$  bodů. Nápověda: Nepomůže nám nějak Ramseyova věta pro 4-uniformní hypergrafy? Všechna čísla v této úloze jsou přirozená. [11 b.]
8. Rozhodněte, zda platí:
  - a) Pro každé  $n$  a  $k$  existuje  $N$  takové, že každá matice  $N \times N$  vyplněná čísly  $1 \dots k$  obsahuje konstantní hlavní podmatici (tedy hlavní podmatici obsahující jen jednu hodnotu (na všech pozicích)). Hlavní podmatice pro matici  $A = (a_{ij})$  vznikne tak, že vybereme indexovou množinu  $I$  a prvky hlavní podmatice jsou  $(a_{ij})$ , kde  $i, j \in I$ .
  - b) Pro každé  $n$  existuje  $N$  takové, že v každé matici tvaru  $N \times N$  existuje hlavní podmatice, která je součtem diagonální matice, horní trojúhelníkové a dolní trojúhelníkové (kde trojúhelníkové matice mají již na hlavní diagonále nuly), přičemž každá z těchto tří matic smí být buďto jednobarevná (tedy obsahuje všechny nenulové prvky téže hodnoty), duhová (obsahuje každý prvek jiný), řádková (v každém řádku je jen jedna hodnota, ovšem pro dva různé řádky jsou tyto hodnoty různé) nebo sloupcová (analogie řádkové). [11 b.]
9. Účastníci nejmenovaného Letního matematicko-fyzikálního soustředění hrají Bloudirint. Usoudili ovšem, že nejde o to vyhrát, ale předstírat přiměřenou aktivitu. Zjistili si tudíž od konkurenčního týmu, jakým způsobem se přechází mezi písmeny. Neprojít trasu jim ovšem připadá jako podvod. Nechtějí se ovšem předřít, a proto chtějí navrhnout takovou trasu, na které je čeká co nejmenší převýšení. Mezi trasami s tímtež (minimálním) převýšením, chtějí tu nejkratší. LMFS se odehrává v chráněné krajinné oblasti, kde je zakázáno chodit jinudy, nežli po vyznačených cestách (od kterých jsme v mapě schopni zjistit délku a převýšení mezi jednotlivými písmeny). Navrhněte algoritmus, kterým najdou kýženou cestu. [11 b.]
10. Nejmenovaný Martin a ještě méně jmenovaný Mikuláš jezdí po Liberci. Jelikož znají své řídičské schopnosti, raději se nechtějí potkat. Každý z nich má určen start a cíl. Starty i cíle

jsou na nějakém náměstí. Pánové jsou rychlejší než smrt a jezdí tak, že během vteřiny projedou jednu (jakoukoliv) ulici (na příští náměstí). Řízení se tedy odehrává po jednotlivých kolech (kdy na začátku vteřiny jsou pánové na náměstích, pak vyrazí silnicí a koncem vteřiny skončí na jiném náměstí). Navrhněte algoritmus popisující, jak mají pánové jet, aby dorazili (oba) do cíle co nejdříve. Podmínka, že do cíle mají dorazit oba, je myšlena tak, že ten, kdo přijede do cíle jako druhý, dorazí co nejdříve. Pánové se navzájem svých řídičských schopností obávají natolik, že se nejen nechtějí setkat na jednom náměstí, nechtějí se míjet na jedné silnici, ale nechtějí dokonce být ani na sousedních náměstích (tedy na náměstích spojených ulicí). [11 b.]