Matematická paralympiáda starších, Kačák 2014

1. Najděte čtvercovou matici A řádu pět takovou, že A, A^2, A^3, A^4 jsou nenulové, avšak $A^5 = 0$. (7 bodů)
2. Dokažte, že platí:
   - Je-li A symetrická a $n \in \mathbb{N}$, pak A^n je rovněž symetrická.
   - Je-li A symetrická podle vedlejší diagonály a $n \in \mathbb{N}$, pak A^n je rovněž symetrická podle vedlejší diagonály. (14 bodů)
3. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(na diagonále, nad diagonálou a pod diagonálou jsou jedničky, jinde nuly) je čtvercová matice řádu 100. Vypočítejte její determinant. (14 bodů)
4. Pro každé reálné číslo a určete hodnost matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & a & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$
(9 bodů)
5. Zjistěte, pro jaké hodnoty parametru a, b, c je soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & b & a+b+1 & 0 \\ a+1 & 2b & a+2b+1 & 1 \\ 4c-1 & 3b & 3b+4c-1 & 2 \end{array}\right)$$
řešitelná a nalezněte množinu všech jejích řešení. (9 bodů)
6. Ukažte, že endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ daný předpisem
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)' = (x_1, 3x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4)'$$
je jednoduchý. Popište jeho geometrickou strukturu. (9 bodů)
7. Určete dimenze prostorů S_n a A_n, tj. prostorů symetrických a antisymetrických matic řádu n.(8 bodů)
8. Ukažte, že pro každý graf G je $\det(\mathcal{L}_G) = 0$. (6 bodů)
9. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
   - Pro každé n existuje m takové, že pro každý graf G s n vrcholy graf G je souvislý právě když ${A_G}^m$ neobsahuje nulu.
   - Pro každé n existuje m takové, že pro každý graf G s n vrcholy nebipartitní graf G je souvislý právě když ${A_G}^m$ neobsahuje nulu.
   - Pokud tvrzení platí, nalezněte minimální možné n.

   (6 + 6 bodů)
10. Určete determinant následující matice:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
(12 bodů)

Matematická paralympiáda starších, Kačák 2014

1. Najděte čtvercovou matici A řádu pět takovou, že A, A^2, A^3, A^4 jsou nenulové, avšak $A^5 = 0$. (7 bodů)
2. Dokažte, že platí:
   - Je-li A symetrická a $n \in \mathbb{N}$, pak A^n je rovněž symetrická.
   - Je-li A symetrická podle vedlejší diagonály a $n \in \mathbb{N}$, pak A^n je rovněž symetrická podle vedlejší diagonály. (14 bodů)
3. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(na diagonále, nad diagonálou a pod diagonálou jsou jedničky, jinde nuly) je čtvercová matice řádu 100. Vypočítejte její determinant. (14 bodů)
4. Pro každé reálné číslo a určete hodnost matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & a & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$
(9 bodů)
5. Zjistěte, pro jaké hodnoty parametru a, b, c je soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & b & a+b+1 & 0 \\ a+1 & 2b & a+2b+1 & 1 \\ 4c-1 & 3b & 3b+4c-1 & 2 \end{array}\right)$$
řešitelná a nalezněte množinu všech jejích řešení. (9 bodů)
6. Ukažte, že endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ daný předpisem
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)' = (x_1, 3x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4)'$$
je jednoduchý. Popište jeho geometrickou strukturu. (9 bodů)
7. Určete dimenze prostorů S_n a A_n, tj. prostorů symetrických a antisymetrických matic řádu n.(8 bodů)
8. Ukažte, že pro každý graf G je $\det(\mathcal{L}_G) = 0$. (6 bodů)
9. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
   - Pro každé n existuje m takové, že pro každý graf G s n vrcholy graf G je souvislý právě když ${A_G}^m$ neobsahuje nulu.
   - Pro každé n existuje m takové, že pro každý graf G s n vrcholy nebipartitní graf G je souvislý právě když ${A_G}^m$ neobsahuje nulu.
   - Pokud tvrzení platí, nalezněte minimální možné n.

   (6 + 6 bodů)
10. Určete determinant následující matice:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
(12 bodů)