Matematická paralympiáda mladších, Kačák 2014

1. Určete $f'(0)$ pro

   - $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,
   - $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\dots(x-2012)(x-2013)(x-2014)$.

   (2 + 4 body)

2. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je dvojnásobným kořenem polynomu
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$
   Ukažte, že $f'(\alpha) = 0$. (7 bodů)

3. Nalezněte pětici reálných čísel a, b, c, d, f tak, aby limita
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot e^n + b \cdot \ln^2(n) + c \cdot n^3}{d \cdot 2^n + f \cdot (n-1)^3}$$
   byla a) 0, b) $+\infty$, c)1.[1] (9 bodů)

4. Spočtěte pro $a \in \mathbb{R}$:[2]
$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}\right)\frac{e^{e^{a+x}}-e^{e^a}}{x}\right)$$
   (10 bodů)

5. Sporťáci při výletu lesem zpozorovali, že se pomalu stmívá. Rozevřeli tedy mapu, aby se podívali, kudy z něho ven. Díky mapě zjistili, že plocha lesa je 4 km^2. Ukažte, že jim stačí ujít $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ km, aby se z lesa dostali. (8 bodů)

6. Uvažujte posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $a_n = 2^n + 3^n$. (9 bodů)

7. Vyšetřete průběh funkce (jak se chová když $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, kde jsou body lokálního maxima či minima, na kterých intervalech je rostoucí/klesající a konvexní/konkávní):
$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$
   (13 bodů)

8. Uvažujme $p \in [1; +\infty)$ a rovnici
$$x^3 + \sqrt{\frac{\ln p}{p}}x^2 + \frac{5}{2p}x + \sin(p^4 + 8e^p) = 0.$$
   Její kořeny označme x_1, x_2, x_3 (pozorujme, že kořeny závisejí na p). Nalezněte pro jaké p je hodnota
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
   maximální.[3] (15 bodů)

9. Nalezněte kořeny následující rovnice, pokud víte že jsou celočíselné:
$$\frac{2}{5}x^4 - 4x^3 - \frac{224}{5}x^2 + \frac{2228}{5}x - 858 = 0.$$
   (9 bodů)

10. Komické duo Puš - Popp hraje posloupnost nasledujících tří vzrušujících her. Pokaždé rozmístí na šachovnici každý z hráčů ke svému kraji pěšce, kterými hráči smějí tahat dopředu a dozadu (každý hraje jen se svými pěšci). Pěsci se nesmějí přeskakovat a mouhou se tedy zablokovat. Jako obvykle, kdo nemůže táhnout, prohrává. Při prvním tahu žádný z hráčů nesmí táhnout figurkou přes polovinu šachovnice (v dalších tazích smí táhnout o libovolný počet políček jednou figurkou dopředu nebo dozadu). Tři hry vypadají tak, že na první hru mají šachovnici 4 x 8, na druhou a třetí vždycky druhý člen komického due jeden sloupec šachovnice odstřihne, tedy druhá hra probíhá na šachovnici 3×8 a třetí na šachovnici 2×8. V tom, kdo začne, se hráči střídají. V první hře začíná Popp, ve druhé Puš, ve třetí Popp. Určete (a vysvětlete proč), kdo ve které hře vyhraje. (14 bodů)

---

[1] Vyřeště všechny případy - stačí jedna sada koeficientů pro každý případ.

[2] Nápověda: jaká je definice derivace?

[3] Nápověda: zkuste použít vztahy jednoho pána, výraz $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ si vyjádřit jako funkci od p díky oněm vztahům. Nakonec nalezněte maximum této funkce od p.

Matematická paralympiáda mladších, Kačák 2014

1. Určete $f'(0)$ pro
   - $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,
   - $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-2012)(x-2013)(x-2014)$.

   (2 + 4 body)

2. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je dvojnásobným kořenem polynomu
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$
   Ukažte, že $f'(\alpha) = 0$. (7 bodů)

3. Nalezněte pětici reálných čísel a, b, c, d, f tak, aby limita
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot e^n + b \cdot \ln^2(n) + c \cdot n^3}{d \cdot 2^n + f \cdot (n-1)^3}$$
   byla a) 0, b) $+\infty$, c)1.[4] (9 bodů)

4. Spočtěte pro $a \in \mathbb{R}$:[5]
$$\lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x-4} \right) \frac{e^{e^{a+x}} - e^{e^a}}{x} \right)$$
   (10 bodů)

5. Sporťáci při výletu lesem zpozorovali, že se pomalu stmívá. Rozevřeli tedy mapu, aby se podívali, kudy z něho ven. Díky mapě zjistili, že plocha lesa je 4 km^2. Ukažte, že jim stačí ujít $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ km, aby se z lesa dostali. (8 bodů)

6. Uvažujte posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $a_n = 2^n + 3^n$. (9 bodů)

7. Vyšetřete průběh funkce (jak se chová když $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, kde jsou body lokálního maxima či minima, na kterých intervalech je rostoucí/klesající a konvexní/konkávní):
$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$
   (13 bodů)

8. Uvažujme $p \in [1; +\infty)$ a rovnici
$$x^3 + \sqrt{\frac{\ln p}{p}}x^2 + \frac{5}{2p}x + \sin(p^4 + 8e^p) = 0.$$
   Její kořeny označme x_1, x_2, x_3 (pozorujme, že kořeny závisejí na p). Nalezněte pro jaké p je hodnota
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
   maximální.[6] (15 bodů)

9. Nalezněte kořeny následující rovnice, pokud víte že jsou celočíselné:
$$\frac{2}{5}x^4 - 4x^3 - \frac{224}{5}x^2 + \frac{2228}{5}x - 858 = 0.$$
   (9 bodů)

10. Komické duo Puš - Popp hraje posloupnost nasledujících tří vzrušujících her. Pokaždé rozmístí na šachovnici každý z hráčů ke svému kraji pěšce, kterými hráči smějí tahat dopředu a dozadu (každý hraje jen se svými pěšci). Pěsci se nesmějí přeskakovat a mouhou se tedy zablokovat. Jako obvykle, kdo nemůže táhnout, prohrává. Při prvním tahu žádný z hráčů nesmí táhnout figurkou přes polovinu šachovnice (v dalších tazích smí táhnout o libovolný počet políček jednou figurkou dopředu nebo dozadu). Tři hry vypadají tak, že na první hru mají šachovnici 4 x 8, na druhou a třetí vždycky druhý člen komického due jeden sloupec šachovnice odstřihne, tedy druhá hra probíhá na šachovnici 3×8 a třetí na šachovnici 2×8. V tom, kdo začne, se hráči střídají. V první hře začíná Popp, ve druhé Puš, ve třetí Popp. Určete (a vysvětlete proč), kdo ve které hře vyhraje. (14 bodů)

---

[4] Vyřeště všechny případy - stačí jedna sada koeficientů pro každý případ.

[5] Nápověda: jaká je definice derivace?

[6] Nápověda: zkuste použít vztahy jednoho pána, výraz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ si vyjádřit jako funkci od p díky oněm vztahům. Nakonec nalezněte maximum této funkce od p.