Matematická paralympiáda starších, Kačák 2013

1. Dva hráči hrají následující zábavnou hru. Začnou s k vrcholy (bez hran). Hráči se střídají v tazích, přičemž v průběhu tahu hráč přidá jednu hranu mezi zadané vrcholy tak, aby graf (ne multigraf) zůstal rovinný. Kdo nemůže táhnout, prohrává. Určete, který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud počet vrcholů je
   (a) 8,
   (b) 28,
   (c) 2013. (10 bodů)
2. Rovinně nakreslete K_7 na tórus a K_6 do projektivní roviny. (12 bodů)
3. Jaký je maximální počet hran rovinného grafu bez trojúhelníků? Jaký je největší možný počet stěn takového grafu? Jaký je maximální počet stěn v rovinné triangulaci. (Předpokládejte graf o n vrcholech.) (8 bodů)
4. Najděte vzájemně jednoznačná zobrazení mezi následujícími množinami:
   (a) množina všech posloupností 0 a 1
   (b) množina všech posloupností přirozených čísel
   (c) množina všech neklesajících posloupností přirozených čísel
   (d) $\mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. (13 bodů)
5. Na kružnici je dáno n různých bodů. Každé dva body jsou spojené tětivou tak, že žádné tři tětivy se neprotínají v jednou bodě. Určete, na kolik částí je rozdělen vnitřek kruhu. (12 bodů)
6. Nalezněte body, ve kterých funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ nabývá minima a maxima na množině
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}.$$
   Zdůvodněte, proč takové body existují. Nápověda: po převedení rovnice kuželosečky do základního tvaru parametrizujte obdobně jako v případě kružnice. (10 bodů)
7. Nechť $f\colon [0,1] \to [0,1]$ je spojitá funkce. Dokažte, že existuje bod $x \in [0,1]$ takový, že $f(x) = x$. (7 bodů)
8. Nechť a je kladné reálné číslo. Zvolme libovolné číslo $x_1 > \sqrt{a}$ a pro $n = 2, 3, \dots$ postupně položme
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
   Dokažte, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a určete její limitu. (12 bodů)
9. Z intervalu $[0,1]$ vybereme náhodně dvě čísla p a q. Jaká je pravděpodobnost, že rovnice $x^2 + px + q$ nemá reálné kořeny? (8 bodů)
10. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$$f(x,y,z) = (yz)^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2$$
    na $\mathbb{R}^3$. (8 bodů)