Matematická paralympiáda mladších, Kačák 2013

1. Účastníci nejmenovaného soustředění řešili úlohy do průběžné olympiády. Každá byla ohodnocena 14, 21 nebo 5 body. Nejpilnější student získal 257 bodů. Kolik kterých úloh vyřešil? (Uveďte všechny možnosti.) (11 bodů)

2. Nalezněte předpis $\mathbb{A}v + b$ zobrazení, které odpovídá reflexi (osové souměrnosti) podle přímky dané předpisem $y + x = 1$). Nápověda - osovou souměrnost podle osy y jsme si již uvedli. (9 bodů)

3. Existují reálná čísla a, b, c, d, pro něž je splněna rovnost
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$
Nalezněte tato čísla a následně dokažte výše uvedený vzorec pomocí matematické indukce. (13 bodů)

4. Najděte rovnici normály (kolmici k tečně) ke kubické parabole
$$y(x) = x^3 - 7x + 6$$
v jejím bodě $[-1, 12]$. (8 bodů)

5. Jaký zbytek po dělení dává číslo
   (a) 2^{777777} dělené číslem 7,
   (b) $2^{14} + 2^{13} + 2^{12}$ dělené číslem 22. (8 bodů)

6. Nalezněte reálná čísla a, b, c taková, aby
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x+1} - ax^2 - bx - c \right)$$
byla rovna
   (a) $+\infty$,
   (b) číslo p, kde $p \in \mathbb{R}$. (9 bodů)

7. Spočtěte
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}. \quad \text{(10 bodů)}$$

8. Martin a Martin se kvůli hlučnému řevu Stegosaura rozhodli přespat venku. K tomuto účelu si chtějí zřídit tee-pee[1] před Kačákem. Mají 10 metrů čtverečných látky na plášť tee-pee. Určete, jaký poloměr musí mít podstava stanu, aby objem vnitřku byl co největší? (13 bodů)

9. Pro jaké reálné parametry p a q má funkce
$$x^3 + px + q = 0$$
tři různé reálné kořeny? (Svoje řešení zdůvodněte). (11 bodů)

10. Najděte všechna přirozená čísla a, b, c a n, která splňují „převrácenou Velkou Fermatovu větu“:
$$n^a + n^b = n^c. \quad \text{(8 bodů)}$$

[1] pro neznalce májovek - indiánský stan ve tvaru kužele