Matematické paralympijské hry 2012 starší

1. Spočtěte hmotnost třírozměrného objektu omezeného v kartézské soustavě souřadnic rovinami $z = 0$, $z = 1$, $y = 1$, $y = 0$, $x = 2$ a $-2x + y + z = 0$, jehož hustota v této soustavě je dána funkcí $x^2z + 1$. *(10 b)*

2. Rozhodněte, zda následující čísla patří do Cantorova diskontinua:

   a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, *(4 b)*

   b) $\frac{1}{3}, \frac{19}{27}, \frac{9}{13}$. *(6 b)*

3. a) Nechť $A = \begin{pmatrix} 0,1,0,0,1 \\ 1,0,1,0,0 \\ 0,1,0,1,0 \\ 0,0,1,0,1 \\ 1,0,0,1,0 \end{pmatrix}$ je matice sousednosti kružnice délky 5. Vypočítejte mocninu A^5. *(5 b)*

   b) Kolik existuje sledů délky 5 mezi jednotlivými (ne nutně různými) vrcholy kružnice C_5? *(5 b)*

4. Najděte všechny matice komutující s oběma maticemi $\begin{pmatrix} 0,0,1 \\ 0,1,0 \\ 1,0,0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0,0,1 \\ 1,0,0 \\ 0,1,0 \end{pmatrix}$. *(10 b)*

5. V zadaném bludišti se zadanými šířkami chodeb najděte cestu pro co nejširšího tlusťocha. Jinými slovy: jaký nejtlustší člověk projde? Navrhněte algoritmus, který tuto cestu najde. *(10 b)*

6. a) Ukažte, že doplněk permutačního grafu je permutační graf (tedy že PER = Co-PER). *(5 b)*

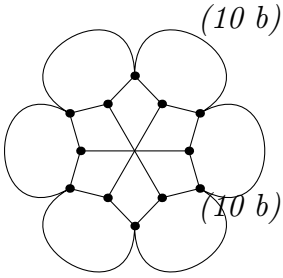
   b) Je Kratochvílův graf grafem reprezentovatelným spojitými funkcemi na intervalu $< 0, 1 >$? *(5 b)*

7. Na plese je n politiků a n kontroverzních podnikatelů. Kontroverzní podnikatelé porůznu uplácejí politiky. Žádný kontroverzní podnikatel však dosud neuplatil všechny politiky a žádný politik zatím nevzal úplatek od všech kontroverzních podnikatelů. Ukažte, že existuje dvojice politiků p_1, p_2 a dvojice kontroverzních podnikatelů k_1, k_2 takových že, k_1 uplatil p_1 a taktéž k_2 uplatil p_2, ovšem k_1 neuplatil p_2 a ani k_2 neuplatil p_1. *(10 b)*

8. Najděte explicitní předpis pro nějaké prosté zobrazení $f : \{0, 1, 2\}^{\mathcal{N}} \to \{0, 1\}^{\mathcal{N}}$. *(10 b)*

9. Porovnejte mohutnosti následujících množin:

   - všechny posloupnosti přirozených čísel,
   - všechny neklesající posloupnosti přirozených čísel,
   - všechny nerostoucí posloupnosti přirozených čísel. *(10 b)*



10. a) Jsou dána 82 přirozená čísla. Dokažte, že mezi nimi existují dvě taková, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 81. *(4 b)*

    b) Je dáno prvočíslo p různé od 2 a 5. Dokažte, že existuje násobek čísla p, jehož všechny cifry jsou rovny jedné. *(6 b)*