

Matematické paralympijské hry Bedřichov/Kačák 2012 – mladší

1. Nalezněte pětiici (stačí jednu pro každý případ) reálných čísel a, b, c, d, f , aby limita

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot e^x + b \cdot \ln^{15} x + c \cdot x^2 + 1}{d \cdot 2^x + f \cdot (x-1)^2}$$

vyšla (a) $L = 0$, (b) $L = +\infty$, (c) $L = 1$.

9 bodů

2. Nalezněte vzoreček pro součet

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k+1) \cdot (3k+4)},$$

kde $k \in \mathbb{N}$.

9 bodů

3. Rozhodněte, zda rovnice

$$x^5 + 14x^2 + 2 = 0$$

má racionální kořeny. (Nápověda: nešlo by třeba využít techniku z důkazu iracionality $\sqrt{2}$?)

9 bodů

4. Spočítejte pro $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} \right) \cdot \frac{e^{e^{a+x}} - e^{e^a}}{x} \right)$$

12 bodů

5. Týmy jednoho nejmenovaného soustředění (dále JNS) hrají v lese ponorky (hra s navigátorem a slepou posádkou). Dva týmy (jeden Archaeopteryx a druhý Stegosaura) se pohybují po různoběžných přímkách konstantními rychlostmi $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a $4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (výchozí pozice v čase $t = 0$ je zachycena i se směry pohybu na obrázku z druhé strany zadání). Kdyby se týmy dostaly k sobě na vzdálenost tří metrů, jedna z ponorek s jistotou zasáhne nepřátelskou (jinak nemají žádnou šanci se trefit). Rozhodněte, zda se nějaká ponorka potopí (a svoje tvrzení zdůvodněte).

13 bodů

6. Spočítejte první derivaci funkce

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \sin(\cos(x)).$$

7 bodů

7. Uvažujme $p \in [1, +\infty)$ a rovnici

$$x^3 + \sqrt{\frac{\ln p}{p}} x^2 + \frac{5}{2p} x + \sin(p^4 + 8e^p) = 0.$$

Její kořeny označme x_1, x_2, x_3 . Nalezněte pro jaké p je výraz

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

maximální.

15 bodů

8. Sportáři při výletě lesem zahlédli, že se pomalu stmívá. Proto ihned rozevřeli mapu, aby se podívali, jak se dostat z lesa. Les, kterým procházejí, má na mapě plochu 4 km^2 . Ukažte, že jim stačí ujít $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ km}$, aby se z lesa dostali.

7 bodů

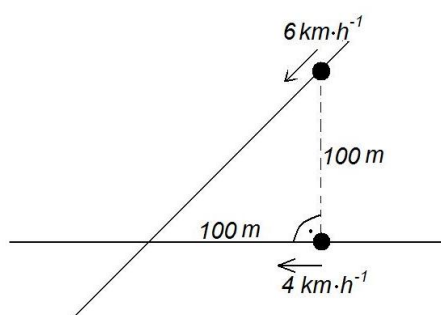
9. Najděte všechna prvočísla a , b , c , pro která platí:

$$a^3 - b^3 = c.$$

7 bodů

10. U ohýnku sedí v kruhu 37 lidí mezi nimi jsou i dva hráči – Tomáš s Filipem. Ti hrají hru, ve které se střídají po tazích. Všichni sedící u ohně drží v ruce tácek s buřtem. V průběhu svého tahu musí hráč sníst buřt člověku sedícímu napravo nebo nalevo (jenom jednomu). V reakci na snědení buřtu sedící s prázdným táckem smutně opouští lavičku okolo ohniště a jde spát, čímž končí jeden tah. Vítězem se stává ten, kdo ve svém tahu sní buřt svému protihráči. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Filip?

12 bodů



Obrázek 1: k úloze 5